تحصيل
د لغمان پوهنتون علمي، څېړنيزه مهالنۍ خپرونه
۱۴۰۲ ل کال لومړی ګڼه، تله (ميزان)

د عددي انتيګرال نيونې تقريبي محاسبې لپاره د منځنۍ نقطې او لامبرګ کړنلارو پرتله

*[1] پوهنمل شفيع الله نيازی [2] پوهنيار اريانا عبدالرحيم زی [3] پوهنيار عبدالبارق احمد زی [4] نامزاد پوهنيار محب الله محبوب [5]
پوهنيار لياقت همدرد، لغمان پوهنتون، ښوونې او روزنې پوهنځی، رياضي څانګه

لنډيز

د ځينو ځانګړو انتيګرالونو محاسبه لکه: $\int_0^1 \frac{sinx}{x}dx$, $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$, $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$، د ذوذنقې او سيمپسون انتيګرال نيونې عددي کړنلارو څخه په ګټې اخيستنې شونې نه ده، په دې صورت کې د نيوټن کاست انتيګرال نيونې فورمولونه په دوه برخو وېشل کيږي، تړلي فورمولونه او خلاص فورمولونه،که چېرې د $\int_a^b f(x)dx \quad (1)$ انتيګرال د محاسبې لپاره داسې فورمول وکارول شي، چې په هغه کې د a او b له دواړو نقطو څخه ګټه اخيستل شوې وي، نو داسې فورمول ته تړلی فورمول وايي. لکه د ذوذنقې او سيمپسون فورمولونه، که چېرې د انتيګرال نيونې فورمول يو له دغو دوو نقطو a يا b پورې تړلی نه وي، داسې فورمول ته خلاص فورمول وايي. که چېرې په (1) فورمول کې د F تابع د a يا b نقطه کې تعريف شوی نه وي، خو انتيګرال يې شتون ولرې په دې صورت کې د ذوذنقې او سيمپسون عددي کړنلارې د يو انتيګرال د تقريبي قيمت د محاسبې لپاره په کار نه وړل کيږی، نو په داسی حالاتو کې بايد د نيوټن کاست د خلاصو فورمولونو څخه ګټه واخيستل شي، بناءً په دې صورت کې دوه نورې کړنلارې، چې د منځنۍ نقطې او لامبرګ کړنلارو په نامه يادېږی په پام کې نيسو، چې د دې کړنلارو پر بنسټ کولای شو $\int_a^b f(x)dx$ بڼې انتيګرال تقريبي مقدار په هغه صورت کې، چې f(a) او f(b) مقدارونه ناټاکلي وي محاسبه کړو او د مقايسې په توګه د پايلو ځيرتيا کچه يې په دواړو کړنلارو پرتله کوو او هغه تقريبي مقدار د ځواب په توګه ټاکو، چې د خطاء کچه يې ټيټه وي. د دې څېړنې اهميت په دې کې دی، چې د عددي مسايلو دقيق څېړلو لپاره ځانګړې جامع طرحې وړانديزوي، چې پر بنسټ يې د ځينو ځانګړو انتيګرالونو عددي حل پرته له کمپيوټري پروګرامونو څخه اسانه او کم وخت کې ترلاسه کيږي. د يادې کړنلارو پر بنسټ مو لاسته راوړل، چې د ځينو ځانګړو انتيګرالونو تقريبي مقدار فوق العاده ښه او د منلو وړ دی. د مقالې د ليکلو آره موخه د دواړو کړنلارو پر بنسټ د ځينو ځانګړو انتيګرالونو عددي حل د ځيرتيا کچه ټاکل او يو له بل سره يې پرتله کول دي، چې په ساده لارو نه تر لاسه کيږي. دغه څېړنه کتابتوني بڼه

لري، چې بېلا بېلو معتبرو سرچينو او نويو چاپ شويو اثارو څخه پکې ګټه اخيستل شوې ده. د څېړنې په پای کې دې پايلې ته ورسېدو، چې يادې کړنلارې د ځينو ځانګړو انتيګرالونو عددي حل تقريبي مقدار د ځيرتيا کچې ټاکلو لپاره جامع کړنلارې دي، چې پر بنسټ يې کولای شو د ځينو ځانګړو انتيګرالونو تقريبي مقدار د ځيرتيا کچه لاسته راوړو.

کليدي کلمې : انتيګرال، منځنۍ نقطه، رامبرګ، د کړنلارو ځيرتيا او کارونه، تقريبي حلونه.

۱. پېژندنه

د $\int_a^b f(x)dx$ بڼې انتيګرالونو محاسبه په هغه صورت کې، چې $f(x)$ تابع د a يا b نقطې لپاره تعريف شوې وي، په اسانۍ سره کولای شو محاسبه کړو،که چېرې تابع د a يا b نقطه کې تعريف شوی نه وي، خو انتيګرال يې شتون ولري، په دې صورت کې ممکن ونه شو کړای د انتيګرال تقريبي مقدار په دقيق ډول تر لاسه کړو په هغه حالت کې، چې $f(x)$ تابع د a يا b نقطه کې تعريف شوې نه وي، په دې صورت کې د رياضيکي مسايلو عددي ځواب لاسته راوړلو لپاره داسې کړنلارې او روشونه طرحه شوي دي، چې د هغوی پر بنسټ د رياضيکي مسايلو دقيق ځواب په لاس راځي، دهغو کړنلارو له جملو څخه د $\int_a^b f(x)dx$ بڼې انتيګرالونو عددي حل ټاکلو لپاره د منځنۍ نقطې او لامبرګ کړنلارې دي . تر دې دمه کومې کړنلارې، چې د $\int_a^b f(x)dx$ بڼې انتيګرالونو عددي حل لپاره کارول شوي، لکه ذوذنقې کړنلاره، سيمپسون کړنلاره ، ناټاکليو صريبونو کړنلاره د ګاوس کړنلاره،... هره کړنلاره د نوموړو انتيګرالونو عددي حل لپاره ځانګړې د ځيرتيا کچه لري، په همدې بنسټ دغه کړنلارې د هغوکړنلارو له جملې څخه دي، چې په ډېر چټکې سره د يادو انتيګرالونو تقريبي مقدار ته نږدې کيږي(دانايي، 1397).

معمولاً د $\int_a^b f(x)dx$ بڼې انتيګرالونو تقريبي مقدار د حقيقي مقدار سره برابره نه وي، خو لاسته راغلې تقريبي مقدار حقيقي مقدار ته ډېر نږدې او د منلو وړ وي. د عددي کړنلارو ترسره کول ډېرې پړاوونه لري اوهر پړاو معمولاً يوه لړ کړنې په ځان کې رانغاړي، چې په دې صورت کې لازم دی عددې محاسبې په کمپيوټري پروګرامونو تر سره شي پرته د کمپيوټري پروګرامونو د محاسبې حجم زياتيږي، چې ډېرې وخت ته اړتيا لري، چې دا د عددي محاسباتو عمده ستونزه ده، په کمپيوټري پروګرامونو کې بنايي په سوونو ځله د جمعې، تفريق، ضرب يا تقسيم عمليې په اعدادو تر سره شي، چې په پايله کې بنايي د ځيرتيا کچه د پايلو په ترلاسه کولو کې په تدريجي توګه کمه شي په همدې بنسټ هغه عددي محاسبې، چې په کمپيوټري پروګرامونو تر سره کيږي

باید د امکان تر حده کوښښ وشي، تر څو د لاسته راغلي تقریبي ځواب د ځیرتیا کچه لوړه وي. په ټوله کې د عددي محاسباتو په تر سره کولو کې باید له ډېر ځیرتیا څخه کار واخیستل شي، چې تقریبي ځواب حقیقي ځواب ته نږدې شي او د خطاء کچه تر ممکنه پیشبیني شوي حد څخه راټیټه شي(بابلیان، 1397.). دا چې یاده څېړنه کتابتوني بڼه لري د یادي څېړني مواد ما پوهنمل شفیع الله نیازي د مختلفو معتبرو سرچینو څخه راټول کړي او خاکه مې ورته برابره کړې، وروسته استاد پوهنیار اریانا عبدالرحیم زی، پوهنیار عبدالبارق احمدزی، پوهنیار لیاقت همدرد او نامزد پوهنیار محب الله محبوب یاده مقاله د لیکوالۍ د اصولو او فن مطابق ډیزاین او کمپوز کړې او نشر ته یې چمتو کړې.

د څېړنې ستونزې

پوهېږو، چې عددي مسایلو حل خورا اوږدې محاسبې ته اړتیا لري، په همدې بنسټ د پېچلو او مغلقو عددي محاسباتو لپاره ځانګړې طرحې او کړنلارې ارایه شوې، چې د هغوی په مټ کولای شو د یوې پېچلې مسئلې تقریبي حل د ځیرتیا لوړه کچه تر لاسه کړو، دا چې مغلق او ستونزمنو عددي مسایلو حل په ساده لارو امکان نه لري، نو یادې ستونزې ته په کتو یاده علمي څېړنه تر سره شوه، ترڅو لوستونکي د پېچلو او ستونزمنو عددي مسایلو د څېړلو لپاره د ځانګړو طرحو او کړنلارو او په ځانګړي توګه د منځنۍ نقطې او رامبرګ کړنلارو په اړه چې د ځیرتیا کچې یې په پوره اندازه لوړې دي، بشپړ معلومات تر لاسه کړي.

موخې

1. د منځنۍ نقطې او د رامبرګ کړنلارو د ځیرتیا کچې ټاکل او پرتله کول.
2. د هغو کاربردي او اجتماعي مسایلو نمونې چې حل یې د ځینو ځانګړو انتیګرالونو د حل سبب کرځي ارایه کول.

پوښتنې

1. د منځنۍ نقطې او د لامبرګ کړنلارو د ځیرتیا کچې ټاکل کومو عواملو پورې اړه لري.؟
2. کوم شرایط باید په پام کې ونیول شي، چې د یوې کاربردي یا اجتماعي مسئلې حل څخه د د ځینو ځانګړو انتیګرالونو حل ترلاسه شي؟

دڅېړنې ارزښت

یاده موضوع چې په ریاضیاتو او مهندسي علومو کې یوه خورا مهمه موضوع ده او د ځینو ځانګړو انتیګرالونو عددي حل د ځیرتیا کچې ټاکلو په هکله ډېرې پوښتنې ځوابوي. په نوموړې موضوع باندې تر اوسه په هېواد کې چا څېړنه نه ده تر سره کړې. د دې څېړنې ارزښت په دې کې دی چې د عددي مسایلو دقیق څېړلو لپاره ځانګړې جامع طرحې وړاندیزوي، او د تیوري پر ځای په عملي کړنې تاکید کوي، همدارنګه د دې څېړنې ارزښت په دې کې هم دی څو په دې پوه شو چې د عددي مسایلو د حل لپاره د منځنۍ نقطې او رامبرګ کړنلارو څخه ګټه اخستنه اسانه او بهتره ده، چې په کارونې سره یې کولای شو دعددي مسایلو د خطاء کچه د پام وړ اندازې ته را ټیټه کړو.

۲. د څېړنې میتود او کړنلاره

د دې د څېړنې میتود کتابتوني دی، چې معلومات یې د بېلا بېلو معتبرو او نویو چاپ شویو اثارو څخه د یادې موضوع اړوند راټول او په مناسبو ځایونو کې ځای پر ځای شوي دي. په یاده څېړنه کې تر ډېره د عددي مسایلو د حل ځیرتیا کچې ته پاملرنه شوې. د څېړنې لاسته راوړنې په تحلیلي او تقریبي بڼه بیان شوي، چې لوستونکي کولای شي په اسانۍ سره ترې ګټه پورته کړي.

تېرو لیکنو ته کتنه

د $\int_a^b f(x)dx$ بڼې انتیګرالونو عددي حل لپاره بېلا بېلې تحلیلي کړنلارې طرحه شوې، لکه ذوذنقې کړنلاره، سیمپسون کړنلاره،او داسې نور،نوموړې کړنلارې د ځینو ځانګړو انتیګرالونو عددي حل د لاسته راوړلو لپاره کارول کیږي.د ذوذنقې کړنلاره د هغو څو جمله یي تابعګانو لپاره چې حد اکثر درجه یې یو وي دقیقه ده، چې دا د دې کړنلارې لویه ستونزه ده، ځکه د نوموړو تابعګانو دویم مشتق د تل لپاره صفر وي او په پایله کې $E\big(T(h)\big) = 0$ کیږي (تاری مرزآبادی،1393م.348).د سیمپسون په کړنلاره کې که چېرې $E\big(S(h)\big) = -\frac{(b-a)h^4}{180}\, f^{(4)}(\zeta)$ رابطې ته ځیر شو د $S(h)$ خطاء د h^4 سره متناسبه ده ، بناءً د سیمپسون کړنلاره د هغو څو جمله یي ګانو لپاره، چې درجه یې تر درو پورې وي دقیقه ده، په پایله کې کولای شو چې د سیمپسون کړنلاره د هغو څو جمله یي ګانو لپاره چې درجه یې د درو څخه پورته وي د ځیرتیا کچه یې کمه ده، چې دا د دې کړنلارې لویه ستونزه ده(دانایی،1397م.64).یادو کړنلارو او ستونزو ته یې په کتو د منځنۍ نقطې او رامبرګ کړنلارې د $\int_a^b f(x)dx$ بڼې ځینو ځانګړو انتیګرالونو لپاره، چې د F تابع یې د a یا b نقطه کې تعریف شوی نه وي، خو انتیګرال یې شتون ولرې، تقریبي مقدار لاسته راوړلو لپاره جامع کړنلارې

دي د نومويو کړنلارو ښېګڼه په دې کې ده، چې تقريبي ځواب يې حقيقي ځواب ته ډېر نږدې او د هر ډول توابعو لپاره کارول کېږي، چې د ځيرتيا کچه يې فوق العاده لوړه او د منلو وړ ده.

موندنې

د منځنۍ نقطې انتيګرال نيونې کړنلاره

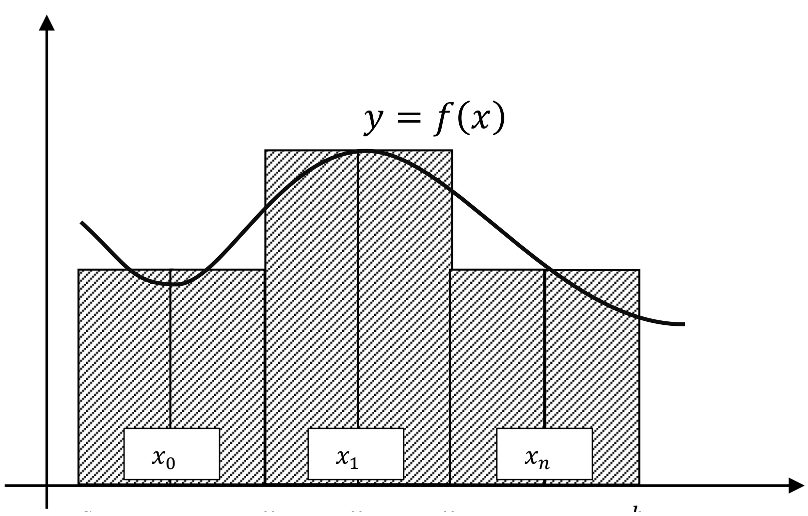
د منځنۍ نقطې انتيګرال نيونې په کړنلاره کې لرو چې:

$$\int_{xi}^{xi+1} f(x)dx \approx h\, f(xi + \frac{h}{2})$$

د $\int_a^b f(x)dx$ انتيګرال تقريبي محاسبې فورمول پيداکولو لپاره $[a,b]$ انټروال په n مساوی برخو ويشو او د پورته فورمول په مرسته لرو چې:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{xi}^{xn} f(x)dx = \int_{x0}^{x1} f(x)dx + \int_{x1}^{x2} f(x)dx + \cdots + \int_{xn-1}^{xn} f(x)dx$$
$$\approx M(h) = h\left[f\left(x0 + {}^{h}/_{2}\right) + f\left(x1 + {}^{h}/_{2}\right) + \cdots + f\left(xn - 1 + {}^{h}/_{2}\right)\right. \quad (2)$$

پورته فورمول د منځنۍ نقطی کړنلارې په نوم يادېږي، لکه څرنګه چې په لاندې شکل کې ليدل کېږي په حقيقت کې منځنۍ نقطې انتيګرال نيونه د هر قطع خط په مخ د تشکيل شويو مستطيلونو مساحت محاسبه کوي(بابليان، 1397.م:37-35)..



شکل: د د انټروالونو د ويش کچې منځنۍ نقطه ښيي. (تاری مرز آبادی،1393).

په پورته فورمول کې ليدل کېږي، چې د تابع له مقدار څخه په x_0 او x_n نقطو کې، يعنې په a او b کې ګټه نه ده اخيستل شوې، نو په همدې بنسټ کولای شو هغه د هغو انتيګرالونو لپاره چې هغې کې f(a) او f(b)

تعریف شوي نه وي ګټه پورته کړو، د دي کړنلارې د خطاء محاسبې لپاره فرضوو چې f تابع په پوره اندازه مشتق منوونکې تابع ده، خو کولای شو ثابت کړو که چېرې $f(x) \in c^2[a,b]$ وي په دي صورت کې د منځنی نقطې کړنلارې خطاء د لاندي فورمول په بنسټ په لاس راځي ثبوت لپاره [3] ماخذ ته مراجعه وشي.

$$(M(h) = \int_a^b f(x)dx - M(h) \simeq \frac{(b-a)h^3}{24} f''(\xi)$$

چې په پورته رابطه کې ξ د a او b په منځ کې موقعیت لري، په پایله کې ویلی شو، چې د منځنی نقطې کړنلارې خطاء د ذوذنقې کړنلارې د خطاء نمایي ده(مصاحب، 1386م.55)..

بناءً د منځنی نقطی په کړنلاره د $\int_0^{0.9} \frac{dx}{\sqrt{x}}$ انتیګرال تقریبي مقدار په لاس راوړو په هغه صورت کې، چې د محاسبې د وېش کچه $h = 0.01$ او $h = 0.03$، په پام کې نیول شوی وي، د منځنی نقطې کړنلارې له فورمول څخه په ګټه اخیستنې لرو چې(بابلیان،1396م.68).

$$\int_0^{0.9} \frac{dx}{x} = M(0.01) = 0.01\left[\frac{1}{\sqrt{0.005}} + \frac{1}{\sqrt{0.015}} + \frac{1}{0.025} + \cdots + \frac{1}{0.25}\right]$$
$$= 0.539587$$

$$\int_0^{0.9} \frac{dx}{x} = M(0.03) = 0.03\left[\frac{1}{\sqrt{0.015}} + \frac{1}{\sqrt{0.045}} + \frac{1}{0.075}\right] = 0.495915$$

$$\int_0^{0.9} \frac{dx}{x} = \left[2\sqrt{x}\right]_0^{0.9} = 0.6$$

بناءً د $M(0.03)$ توپیر د حقیقي مقدار سره د 0.104 په حدودو کې دی، همدارنګه د $M(0.01)$ توپیر د حقیقي مقدار سره د 0.06 په حدودو کې دی. په پایله کې د داسې انتیګرلونو د محاسبې لپاره د هغو برخو لپاره چې د تابع منځنی نقطې ته نږدې وي h باید ډېر کوچنی په پام کی ونیول شي او د انتروال د نورو برخو لپاره h باید یو اندازه لوی په پام کې ونیول شي. د خطاء د څېړلو لپاره $\int_0^1 cosx\, dx$ انتیګرال تقریبي مقدار محاسبه کوو په هغه صورت کې چې خطاء یې 10^{-3} څخه کمه وي هدف ته د رسېدو لپاره پوهېږو چې(پروانه، 1373م.49).

$$f(x) = \cos x$$
$$f'(x) = -\sin x$$
$$f''(x) = -\cos x$$
$$|f''(x)| \leq 1 = M_2$$

له دي ځایه څخه د h مقدار داسې ټاکو چې

$$\frac{b-a}{24} h^2 M_2 = \frac{h^2}{24} \leq 10^{-3}$$

په لاس راځي چې $0 < h \le 0.155$. په پایله کې لرو چې:

$$n = \frac{b-a}{h} \le \frac{1}{0.155} = 6.4516$$

په پورته حالت کې $n = 7$. په پام کې نیسو یا $h \backsimeq 0.14286$ له دې h څخه په ګټې اخیستنې $M(h)$ په لاس راوړو

$$M(h) = 0.14286(\cos(0.07143) + \cos(0.21429) + \cdots + \cos(0.92859$$
$$= 0.14286(0.99450 + 0.97713 + 0.93690 + 0.87758 + 0.80038$$
$$+ 0.70087 + 0.59896 = 0.14286 * 5.89232 = 0.84178(5D)$$

د انتیګرال حقیقي مقدار عبارت دی له(بابلیان،1397م:64-67).

$$\int_0^1 \cos x \; dx = [\sin x]_0^1 = 0.84147(5D)$$

لیدل کیږي چې

$$\int_0^1 cosx\, dx - 0.84178 = 0.84147 - 0.84178 = 0.00069 < 10^{-3}$$

عددي انتیګرال نیونه د رامبرګ په کړنلاره

د ذوذنقې کړنلاره د عددي انتیګرال نیونې په برخه کې تر ټولو ساده کړنلاره ده، خو د دقت لازمه کچه نه لري، له بلې اړخه یوه مهمه ځانګړتیا لري، چې د هغې څخه په کټه اخیستنې پرته له دې چې تابع په اضافي نقطو کې محاسبه کړو، کولای شو $\int_a^b f(x)dx$ بڼې انتیګرال لپاره بهتر او مناسب تقریبي مقدارونه په لاس راوړو. فرض کړئ، چې د هر ثابت مقدار د h لپاره T(h) محاسبه شوې او هغه نقطې چې غواړو تابع پکې محاسبه شي په لاندې ډول وي(عالم زاده، 1392م.44).

$$a, a+h, a+2h, \dots, a+(n-1)h, b$$

$$I = \int_a^b f(x)dx = T(h) + a_2h^2 + a_nh^4 + a_6h^6 + \cdots \qquad (3)$$

اوس که چېرې د ذوذنقې کړنلاره کې $h/_2$ په پام کې و نیول شي او د پورته فورمول لپاره یې تکرار کړو په دې صورت کې نقاط په لاندې ډول په لاس راځي

$$a, a + h/_2, a + ha + 3h/_2, \dots, a + (n-1)h, a + (n-1)h + h/_2, b$$

په پایله کې د پورته نقاطو لپاره انتیګرال په لاندې ډول په لاس راځي(تاري مرز آبادی، 1393م:64-66).

$$I = \int_a^b f(x)dx = T\left(h/_2\right) + a_2(h/_2)^2 + a_4(h/_2)^4 + a_6(h/_2)^6 + \cdots \qquad (4)$$

د a_1 نقطه د h له مقدار څخه مستقل او f تابع ل i ام مشتق سره متناسب دی، د اثبات لپاره [4] ماخذ ته مراجعه وشي. اوس د a_2 ضريب له (3) او (4) معادلې څخه حذف کوو د دې کار لپاره (3) رابطه د (4) رابطې له څلور چنده څخه کموو نو لرو چې:

$$4I - I = 4I(h) - T(h) + \frac{a_4}{4}h^4 - a_4h^4 + \frac{a_6}{16}h^6 - a_6h^6 + \cdots$$

په پایله کې په لاس راځي چې:

$$I = \frac{4I(h/_2) - T(h)}{3} - \frac{a_4}{4}h^4 - \frac{5a_6}{16}h^{6+\cdots}$$

پورته رابطې څخه څرګندیږي چې $\frac{4T(h/_2) - T(h)}{3}$ د I تقریبي مقدار دی.
او خطاء يې h^4 سره متناسب ده، په داسې حال کې چې د T(h) خطاء h^2 سره متناسب ده.
د دې لړۍ په تکرار سره لروچې:

$$h_0 = b - a \to T_0(h_0)T_{00}$$
$$h_1 = \frac{b-a}{2} = \frac{h_0}{2} \to T(h_{01}) = T_{01}$$
$$h_2 = \frac{b-a}{2^2} = \frac{h_1}{2} \to T(h_{02}) = T_{02}$$
$$h_{k-1} = \frac{b-a}{2^{k-1}} = \frac{h_{k-2}}{2} \to T(h_{k-1}) = T_{0(k-1)}$$
$$h_k = \frac{b-a}{2^k} = \frac{h_{k-1}}{2} \to T(h_{0k}) = T_{ok}$$

د T_{0i} خطاګانې د ${h^2}_i$ سره متناسبې دي، بنا پردې T_{1i} د رامبرګ کړنلارې پر بنسټ په لاندې ډول په لاس راځي (پور پاک، 1385.م.61)

$$T_{10} = \frac{4T_{01} - T_{00}}{3}$$
$$T_{11} = \frac{4T_{02} - T_{01}}{3}$$
$$T_{1(k-1)} = \frac{4T_{0k} - T_{0(k-1)}}{3}$$

چې د هر یو خطاء h^4 سره متناسبه ده، نو کولای شو چې T_{1i} څخه په کټي اخيستنې $\int_a^b f(x)dx$ انتیګرال لپاره مناسب تقريبي مقدارونه په لاس راوړو.

$$T_{20} = \frac{4^2T_{11} - T_{10}}{4^2 - 1}$$

$$T_{21} = \frac{4^2T_{12} - T_{11}}{4^2 - 1}$$
$$T_{2i} = \frac{4^2T_1(i+1) - T_{1i}}{4^2 - 1}$$

او په p ام مرحله کې لرو چې (سلطانیان،1396م.130)

$$T_{pi} = \frac{4^pT_{(p-1)(i+1)} - T_{(p-1)i}}{4^p - 1}, i = 0.1.2 \dots \qquad p = 1,2,3 \dots 3$$

اوس $\int_0^1 x^2\,dx$ انتیګرال په دواړو روشونو حلوو خطاء یې په لاس راوړو او پایلې سره مقایسه کوو په هغه صورت کې چې د وېش کچه $h = \frac{1}{2}, \frac{1}{4}$ په پام کې نیول شوې وي، په سر کې یاد انتیګرال د منځنی نقطې په کړنلاره حلوو د یادې کړنلارې فورمول څخه په ګټې اخیستنې د پورته انتیګرال واقعي مقدار په لاس راوړو لرو چې:

$$\int_0^1 x^2\,dx = = \frac{1}{3}$$

او د منځنی نقطې فورمول څخه ګټه اخلو

$$M(0.5) = 0.5((0.25)^2 + (0.75)^2) = 0.5(0.0625 + 0.5625) = 0.3125$$

د $h = \frac{1}{4} = 0.25$ لپاره لرو چې $\frac{h}{2} = 0.125$ په پایله کې لیکو چې:

$$M(0.25) = 0.25((0.125)^2 + (0.375)^2 + (0.625)^2 + (0.875)^2) = 0.328125$$
$$EM(0.5) = \frac{1}{3} - M(0.5) = \frac{1}{3} - 0.3125 = 0.2083(5D)$$
$$EM(02.5) = \frac{1}{3} - M(0.25) = \frac{1}{3} - 0.3125 = 0.328125(5D)$$

لیدل کیږي، چې په لومړي قدم کې د h مقدار نیمایي کولو سره خطاء $\frac{1}{4}$ سره برابره ده، وروسته دغه خطاء د خطاګانو له نیمایي کولو څخه په ترتیب په لاس راځي $\frac{1}{96}, \frac{1}{24}$ چې په اصل کې د ذوذنقې کړنلارې خطاء ده.
د رامبرګ کړنلارې څخه په ګټې اخیستنې لرو چې:

$$T(0.5) = \frac{0.5}{2}((0.5)^2 + (1)^2) = 0.3125$$
$$T(0.25) = \frac{0.25}{2}((0.25)^2 + 2(0.5)^2 + 2(0.75)^2 + (1)^2) = 0.3359375$$
$$\frac{4T(0.5) - T(0.25)}{3} = \frac{4 \times 0.3125 - 0.3359375}{3} \approx \frac{1}{3}$$

د راکړل شوي انټیګرال حقیقي مقدار هم $\frac{1}{3}$ سره مساوي دی، یعنې هغه تقریبي مقدار چې د رامبرګ په کړنلاره لاسته راځي د حقیقي مقدار سره تقریباً مساوي ده.

په نتیجه کې د دواړو کړنلاوړ د خطاء کچې ته په کتو په مقایسوي ډول دې پایلې ته ورسیدو، چې د رامبرګ کړنلاره نسبت د منځنی نقطې کړنلارې ته بهتره او د تقریبي مقدار په تر لاسه کولو کې د خطاء کچه یې کمه او د منلو وړ ده.

۳. مناقشه

داچې د $\int_a^b f(x)dx$ بنېي انټیګرالونو عددي حل په ریاضیاتو او مهندسي علومو کې ډېر ارزښمن دی، نو ریاضي پوهان د نوموړو انټیګرالونو اهمیت او ارزښت ته په کتو وهڅول شول ترڅو د یادو انټیګرالونو عددي حل لپاره مختلفې کړنلارې او روشونه منځ ته کړي، څو وکولای شي تقریبي ځواب یې په اسانۍ سره په کم وخت کې پرته له کمپیوټري پروګرامونو ترلاسه کړي، داسې چې تقریبي ځواب حقیقي ځواب ته په پوره اندازه نږدې او د خطاء کچه یې د پام وړ حد پورې ټیټه او منلو وړ وي(عالم زاده، 1392م.41). د $\int_a^b f(x)dx$ بنېي انټیګرالونو عددي حل لپاره چې کومې کړنلارې تر دې دمه کارول شوې د نمونې په دول، لکه ذوذنقې کړنلاره، د سیمپسون کړنلاره، د ناټاکلیو ضریبونو کړنلاره (پورپاک،1385م.48). یادې کړنلارې (ذوذنقې کړنلاره، د سیمپسون کړنلاره ،...) چې د $\int_a^b f(x)dx$ بنېي انټیګرالونو عددي حل لپاره کارول کېږي ځینې ستونزې لري، د بیلګې په توګه له یادو کړنلارو څخه د ځینو د دقت درجه د پایلو په ترلاسه کولو خورا ټیټه ده، په همدې بنسټ نه شو کولای د هرې بنېي انټیګرال تقریبي مقدار لاسته راوړلو لپاره ترې ګټه واخلو(بابلیان،1397م.72).نود موضوع اهمیت او ارزښت ته په کتو باید داسې کړنلارې د نوموړو انټیګرالونو عددي حل لپاره وټاکل شي، چې ډېر ژر د پام وړ پایلې ته ورسېږو.کومې کړنلارې چې موږ په دې علمي څېړنه کې د $\int_a^b f(x)dx$ بنېي انټیګرالونو عددي حل لپاره کارولې نسبت یادو کړنلاروته مؤثریت یې په دې کې دی، چې پرته له کمپیوټري برنامو لکه (متلب،میپل،...) د یادو انټیګرالونو دقیق تقریبي مقدار په اسانۍ او کم وخت کې تر لاسه کوي، چې د تقریبي ځواب د ځیرتیا کچه یې فوق العاده بهتره او د منلو وړده.

۴. پایله

په دې علمي څېړنه کې د تحلیل اوتجزیې پایلو په مقایسوي ډول وښووده، چې د رامبرګ کړنلاره نسبت د منځنۍ نقطې کړنلارې ته د $\int_a^b f(x)dx$ بټې انتیګرالونو عددي حل لپاره بهتره کړنلاره ده او نظر منځنۍ نقطې کړنلارې ته د پام وړ تقریبي مقدار په ترلاسه کولو کې د دقت کچه یې ډېره لوړه او د منلو وړ ده. یادې کړنلارې له مهمو بنسټیزو کړنلارو څخه دي، چې پرته له قید او شرط څخه د $\int_a^b f(x)dx$ بټې انتیګرالونو عددي حل د لاسته راوړلو لپاره پایدارې او مناسبې دي. د نوموړو کړنلارو د عددي څېړنو څخه پایله ترلاسه شوه، چې تقریبي ځوابونه د حقیقي ځوابونو سره پوره سمون لري او د خطاء کچې یې فوق العاده ټیټې او د منلو وړ دي.علاوه پردې د نوموړو کړنلارو کارونه او تطبیق یوه مناسبه تګلاره لري، چې عملي کول یې پرته له کمپیوټري پروګرامونو لکه متلب، مپل او داسې نورو پروګرامونو څخه کم وخت او لنډې محاسبې ته اړتیا لري او په اسانۍ سره د $\int_a^b f(x)dx$ بټې انتیګرالونو عددي حل ځواب تر لاسه کېږي، چې د ځیرتیا کچه یې فوق العاده لوړه او د منلو وړ وي.

وړاندیزونه

1. د $\int_a^b f(x)dx$ بټې انتیګرالونو عددي حل لپاره د منځنۍ نقطې او رامبرګ کړنلارو ټاکل چې ځیرتیا کچه یې د تقریبي ځواب په ترلاسه کولو لپاره فوق العاده لوړه ده، او عملي کول یې پرته له کمپیوټري پروګرامونو څخه کم وخت ته اړتیا لري.
2. داچې د $\int_a^b f(x)dx$ انتیکرالونو عددي حل ستونزمنې محاسبې ته اړتیا لري، نو غوره به دا وي، چې د داسې انتیګرالونو د حل لپاره د کمپیوټري پروګرامونو لکه متلب او مپل څخه ګټه واخستل شي او په دې برخه کې لا ډېر کار وشي.

اخځلیکونه

بابلیان، اسمعیل.(1397). آنالیز عددی 1.تهران: دانشگاه پیام نور.
بابلیان، اسمعیل. (1396). مبانی آنالیز عددی. تهران: فاطمی.
پروانه،مسیحا. (1373). آنالیز عددی و محاسبات عددی. تهران: مروی.
پور پاک،علی محمد. (1385). آنالیر کاربردی. تهران: دانشکده فنی دانشگاه تهران.
تاری مرز آباد، ابوالفضل. (1393). آنالیز عددی. تهران: شاهد.

سلطانیان،فهیمه. (1396). روش های محاسبات عددی. تهران: دانشگاه پیام نور.
دانایی، علی. (1387). آشنایی با آنالیز عددی. تهران: دایره سفید.
عالم زاده، علی اکبر.(1392).آنالیز عددی. تهران: ققنوس.
کرایه چیان، اصغر. (1386). آنالیز عددی1. تهران: دهخدا.
مصاحب، غلام محسین. (1386). آنالیز ریاضی. تهران: دهخدا.